

Determinazione dell'Equazione di una Parabola con Asse di Simmetria Fisso

Testo

Determinare l'equazione della parabola che passa per i punti $(-1, -6)$ e $(6, 8)$ e ha l'asse di simmetria sulla retta $x = \frac{1}{2}$.

Soluzione

Per trovare l'equazione della parabola nella forma generale $y = ax^2 + bx + c$, partiamo dalle condizioni fornite:

1. La parabola ha l'asse di simmetria sulla retta $x = \frac{1}{2}$, quindi la coordinata x del vertice è $x_v = \frac{1}{2}$.
2. La parabola passa per i punti $(-1, -6)$ e $(6, 8)$.

Dalla condizione sull'asse di simmetria, sappiamo che la coordinata x del vertice $x_v = -\frac{b}{2a}$ deve essere uguale a $\frac{1}{2}$. Questo ci dà la prima equazione:

$$-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -a$$

Ora possiamo usare le condizioni dei punti per ottenere due ulteriori equazioni. La parabola passa per il punto $(-1, -6)$:

$$-6 = a(-1)^2 + b(-1) + c \Rightarrow -6 = a - b + c$$

E passa per il punto $(6, 8)$:

$$8 = a(6)^2 + b(6) + c \Rightarrow 8 = 36a + 6b + c$$

Sostituiamo $b = -3$ in entrambe le equazioni:

$$\begin{aligned} -6 &= a - (-3) + c \Rightarrow -6 = a + 3 + c \Rightarrow -6 = a + c + 3 \\ 8 &= 36a + 6(-3) + c \Rightarrow 8 = 36a - 18 + c \Rightarrow 8 = 36a + c - 18 \end{aligned}$$

Ora abbiamo un sistema di due equazioni con due incognite:

$$\begin{cases} -6 = a + c + 3 \\ 8 = 36a + c - 18 \end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda per eliminare c:

$$\begin{aligned} 8 - (-6) &= (36a + c - 18) - (a + c + 3) \Rightarrow 14 = 35a - 21 \Rightarrow 14 + 21 = 35a \\ &\Rightarrow 35 = 35a \Rightarrow a = 1 \end{aligned}$$

Ora, sostituiamo $a = 1$ in una delle equazioni per trovare c:

$$\begin{aligned} -6 &= 1 + c + 3 \Rightarrow -6 = 1 + 3 + c \Rightarrow -6 = 4 + c \Rightarrow c = -6 - 4 \\ &\Rightarrow c = -10 \end{aligned}$$

Ora che abbiamo $a = 1$ e $c = -10$, calcoliamo b :

$$b = -3$$

Quindi l'equazione della parabola è:

$$y = x^2 - 3x - 10$$

Verifica

Passaggio per il punto $(-1, -6)$:

$$-6 = (-1)^2 - 3(-1) - 10 \Rightarrow -6 = 1 + 3 - 10 \Rightarrow -6 = -6$$

Passaggio per il punto $(6, 8)$:

$$8 = 6^2 - 3(6) - 10 \Rightarrow 8 = 36 - 18 - 10 \Rightarrow 8 = 8$$

Conclusione

L'equazione della parabola è correttamente trovata come:

$$y = x^2 - 3x - 10$$

