Trova il cilindro con volume massimo e stessa superficie

Il testo di questo esercizio è tratto dal quesito numero 3 dell’esame di maturità per i licei scientifici del 2008.

Testo

Fra le casseruole, di forma cilindrica, aventi la stessa superficie S (quella laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo?

Soluzione

La superficie del cilindro è:

$$S_{cil} = 2A_b + S_l$$

In cui:

- A_b è l’area di base;
- S_l è la superficie laterale.

Ricordiamo che:

$$A_b = \pi r^2$$

E che:

$$S_l = 2\pi r \cdot h$$

In cui:

- r è il raggio della base del cilindro
- h è l’altezza del cilindro.

Quindi:

$$S_{cil} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi(r^2 + rh)$$

Il volume del cilindro è dato da:

$$V_{cil} = A_b \cdot h = \pi r^2 h$$

Dobbiamo trovare $V_{massimo}$ sapendo che:

$$S_{cil} = k$$

Con k costante.

Quindi:

$$2\pi(r^2 + rh) = k$$

Esplicitiamo per r in modo da trovare $h(r)$. Si ha:

$$(r^2 + rh) = \frac{k}{2\pi}$$

Sottraggo r^2 a sinistra e a destra:

$$rh = \frac{k}{2\pi} - r^2$$

Divido per r a sinistra e a destra:

$$h(r) = \frac{k}{2\pi r} - r$$

Troviamo $V_{cil}(r)$ sostituendo $h(r)$ in V_{cil}. Si ottiene:

$$V_{cil}(r) = \pi r^2 \left(\frac{k}{2\pi r} - r\right) = \frac{\pi k}{2} r - \pi r^3$$

Calcolo la derivata $V'_{cil}(r)$. Per farlo ricordiamo che:

$$D[kf(x)] = kf'(x)$$

E che:

$$D(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}$$

Quindi si ha:

$$V'_{cil}(r) = \frac{\pi k}{2} - 3\pi r^2$$

Essendo una parabola ha due valori in cui vale zero. Perciò ci sono due punti a derivata nulla della funzione.

$$\frac{\pi k}{2} - 3\pi r^2 = 0$$

Semplifico per π:

$$\frac{k}{2} - 3r^2 = 0$$

Porto a destra il termine costante:

$$-3r^2 = -\frac{k}{2}$$

Divido a sinistra e a destra per -3:

$$r^2 = \frac{k}{6}$$

Faccio radice a sinistra e a destra (accettando solo la soluzione positiva perché r non può essere negativo):

$$r_0 = \sqrt{\frac{k}{6}}$$

Che deve essere inevitabilmente il nostro punto di massimo.
Per verificare che è punto di massimo calcoliamo la derivata seconda:

$$V''_{cil}(r) = -6\pi r$$

Ricordiamo che se $V''_{cil}(r_0) < 0$ allora è punto di massimo.
Sostituendo:

$$V''_{cil}(r_0) = -6\pi\sqrt{\frac{k}{6}}$$

Che è sicuramente minore di zero e quindi punto di massimo.

Perciò il valore di raggio accettato affinchè il volume del cilindro sia massimo è $\sqrt{\frac{k}{6}}$