Integrale doppio della tangente a rapporto con l'argomento

1 Testo

Risolvere il seguente integrale:

$$\iint \frac{\tan(x+y)}{x+y} dxdy$$

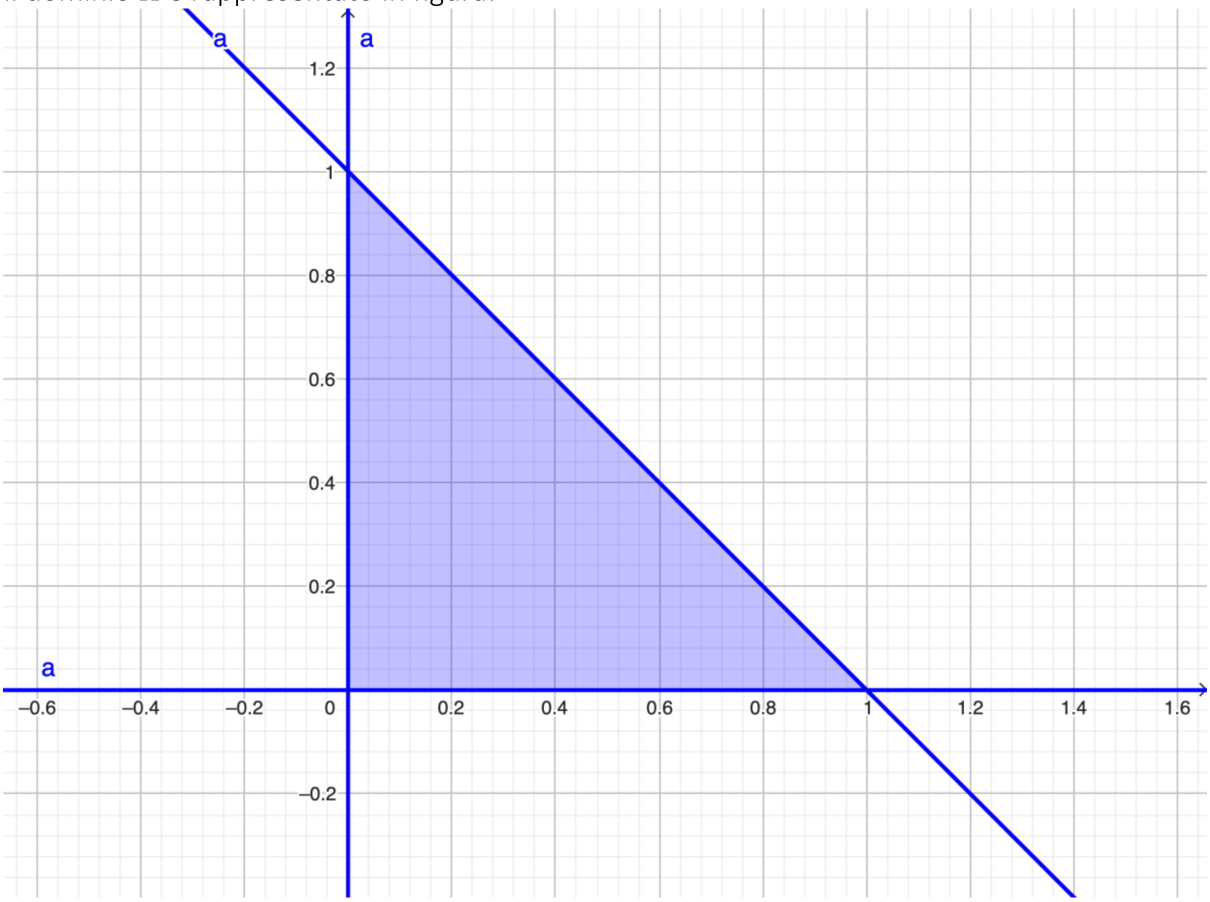
Con:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1, y \geq 0, x \geq 0\}$$

2 Soluzione

2.1 Definizione del dominio

L'insieme Ω rappresenta la regione nel primo quadrante del piano cartesiano delimitata dall'asse x, dall'asse y e dalla retta $x + y = 1$. Questa regione forma un triangolo rettangolo con vertici in $(0{,}0)$, $(1{,}0)$ e $(0{,}1)$.
Il dominio Ω è rappresentato in figura:



2.2 Definizione degli estremi di integrazione

L'integrale del testo può essere quindi riscritto come segue:

$$\int_0^1 \int_0^{-x+1} \frac{\tan(x+y)}{x+y} dydx$$

Tuttavia, tale integrale non può essere direttamente risolto. Per ovviare il problema dobbiamo fare un cambio di coordinate.
Accettiamo un cambio di coordinate polari di questo tipo

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Da cui volendo calcolare lo Jacobiano si ha:

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x(\rho,\theta)}{\partial\rho} & \frac{\partial y(\rho,\theta)}{\partial\theta} \\ \frac{\partial x(\rho,\theta)}{\partial\rho} & \frac{\partial y(\rho,\theta)}{\partial\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \rho$$

Quindi:

$$dydx = \rho d\rho d\theta$$

Il dominio si trasforma come segue:

$$\Omega_{pol} = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : \rho\cos\theta + \rho\sin\theta \leq 1, \rho\sin\theta \geq 0, \rho\cos\theta \geq 0\}$$

Che, posto $\rho \geq 0$, può essere riscritto:

$$\Omega_{pol} = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq \frac{1}{(\cos\theta + \sin\theta)}, 0 \leq \sin\theta \leq 1, 0 \leq \cos\theta \leq 1\right\}$$

Ma seno e coseno sono entrambi maggiori di zero quando:

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Quindi:

$$\Omega_{pol} = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq \frac{1}{(\cos\theta + \sin\theta)}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$$

Riformulando l'integrale si ha:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)}} \frac{\tan\big(\rho(\cos\theta+\sin\theta)\big)}{\rho(\cos\theta+\sin\theta)} \rho d\rho d\theta$$

Ovvero:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)} \int_0^{\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)}} \tan\big(\rho(\cos\theta+\sin\theta)\big)\, d\rho d\theta$$

Ricordando che:

$$\int \tan kx\, dx = -\frac{1}{k}\ln|\cos kx| \qquad con\ k \in \mathbb{R}$$

Si ha:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)} \left[-\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)} \ln|\cos((\cos\theta+\sin\theta)\rho)|\right]_0^{\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)}} d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\ln|\cos(1)| - \ln|\cos(0)|}{(\cos\theta+\sin\theta)^2} d\theta$$

$$-\ln|\cos(1)| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin 2\theta} d\theta$$

Ricordando inoltre che:

$$\int \frac{1}{1+\sin kx}dx = \frac{1}{k}\tan\left(\frac{kx}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

Si ha che:

$$-\ln|\cos(1)|\left[\frac{1}{2}\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$-\ln|\cos(1)|\left[\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = -\ln|\cos(1)|$$