Campo di esistenza di una funzione radicale sinusoidale

1 Testo

Esamina il campo di esistenza e derivata prima di questa funzione:

$$f(x) = \sqrt{\sin\left(\frac{2}{x^2}\right)}$$

2 Soluzione

il campo di esistenza deve essere dato da:

$$\begin{cases} x^2 \neq 0 & \quad \textit{Denominatore diverso da zero} \\ \sin\left(\frac{2}{x^2}\right) \geq 0 & \quad \textit{argomento della radice maggiore di zero} \end{cases}$$

Andiamo a vedere quando:

$$\sin\left(\frac{2}{x^2}\right) \geq 0$$

Che, posto $\theta = \frac{2}{x^2}$, è vero quando:

$$0 \leq \theta \leq \pi \qquad \theta \in [0; 2\pi]$$

Per intervalli di angolo generali deve essere:

$$2k\pi \leq \theta \leq \pi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

In generale quindi possiamo dire che:

$$2k\pi \leq \frac{2}{x^2} \leq \pi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Quindi:

$$2k\pi x^2 \leq 2 \leq (\pi + 2k\pi)x^2 \qquad k \in \mathbb{Z}$$

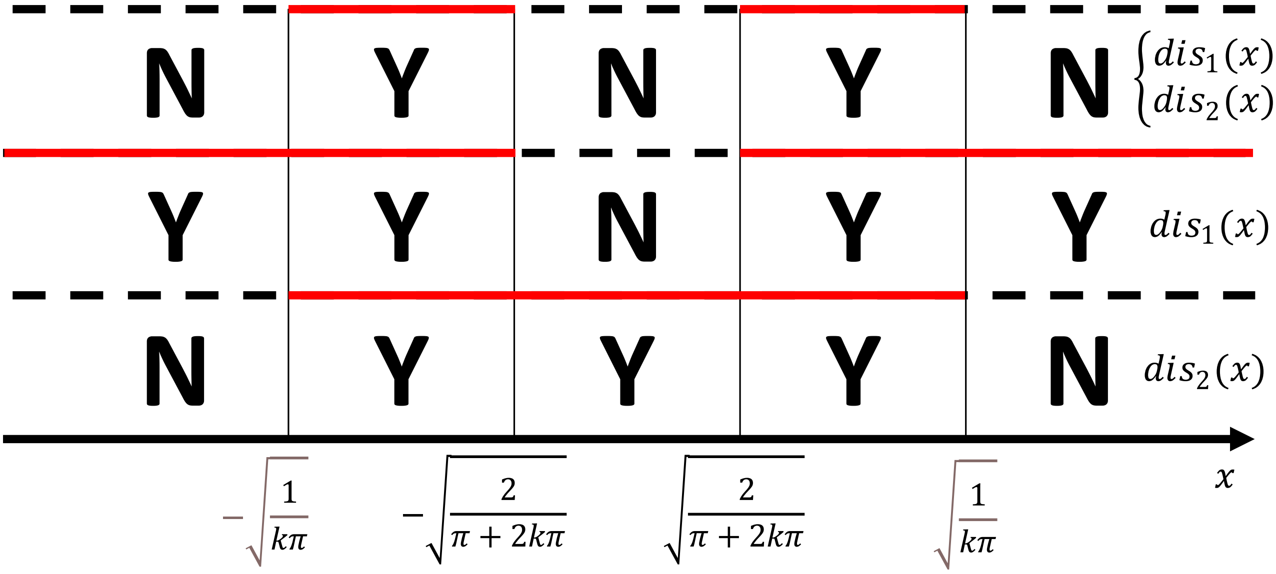
E allora:

$$\begin{cases} (\pi + 2k\pi)x^2 \geq 2 \\ 2k\pi x^2 \leq 2 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Risolvendo si ha:

$$\begin{cases} x^2 \geq \frac{2}{\pi + 2k\pi} \rightarrow x \leq -\sqrt{\frac{2}{\pi + 2k\pi}} \vee x \geq +\sqrt{\frac{2}{\pi + 2k\pi}} \\ x^2 \leq \frac{2}{2k\pi} \rightarrow -\sqrt{\frac{1}{k\pi}} \leq x \leq \sqrt{\frac{1}{k\pi}} \; con\ k \neq 0 \end{cases}$$

Quindi:



In definitiva i valori di x concessi sono:

$$-\sqrt{\frac{1}{k\pi}} \leq x \leq -\sqrt{\frac{2}{\pi+2k\pi}} \vee \sqrt{\frac{2}{\pi+2k\pi}} \leq x \leq \sqrt{\frac{1}{k\pi}} \quad con\ k \in \mathbb{N}-\{0\}$$

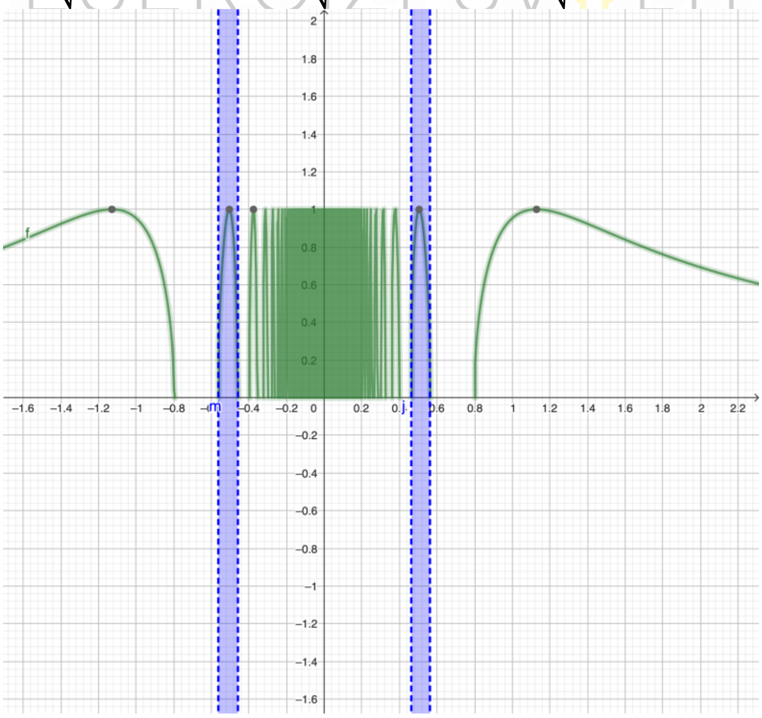


Figura 1 Esempio per k=1

Inoltre esiste l'intervallo seguente, valido solo per $x \in [0; 2\pi]$:

$$x \leq -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \vee \quad x \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \qquad x \in [0; 2\pi]$$