Studio di una funzione con asintoti verticali e obliqui

1 Testo

Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2}$$

2 Soluzione

2.1 Dominio

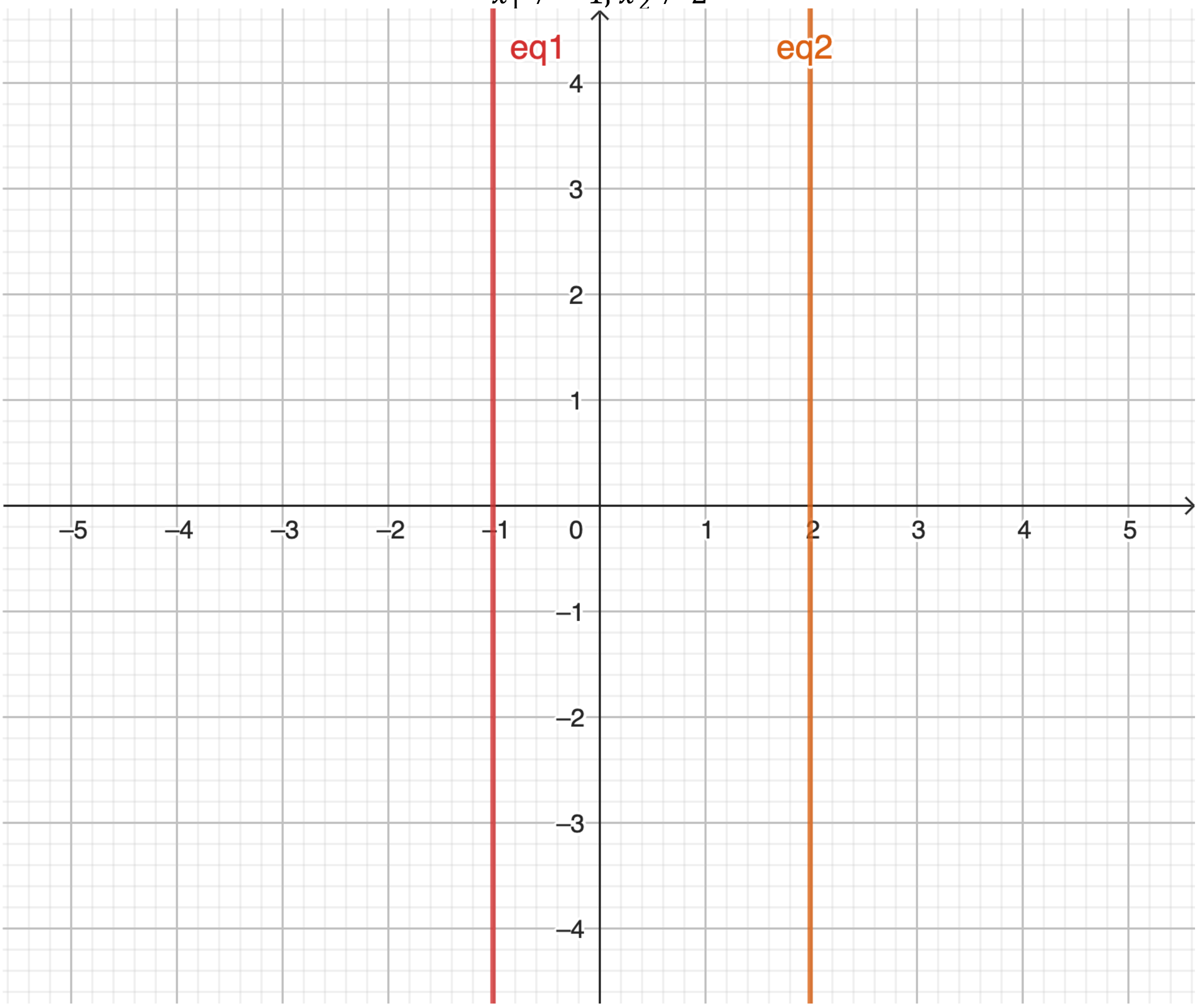
Per trovare il dominio si considera quanto segue:

$$x^2 - x - 2 \neq 0$$

Che ha soluzioni date da:

$$x_{1,2} \neq \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x_1 \neq -1; x_2 \neq 2$$



2.2 Intersezioni con gli assi

Con l'asse delle ascisse deve essere:

$$f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^3+1}{x^2-x-2} = 0$$

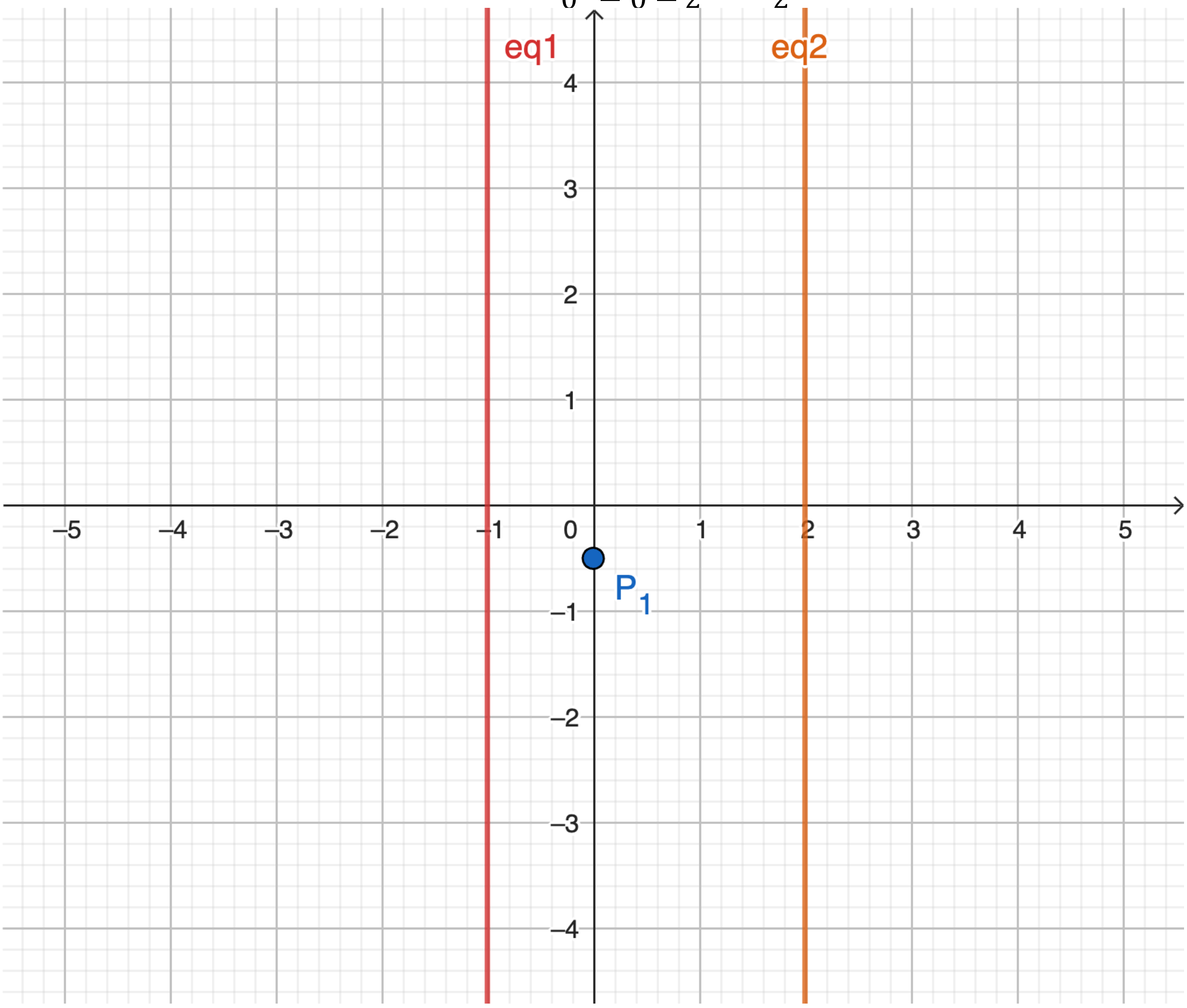
Quindi:

$$x^3 + 1 = 0$$
$$x = -1$$

Questo punto non può esistere perché non è ammesso dal campo di esistenza. Quindi **la curva non interseca l'asse delle ascisse.**

Con le ordinate deve essere:

$$f(x=0) = \frac{0^3+1}{0^2-0-2} = -\frac{1}{2}$$



2.3 Positività della funzione

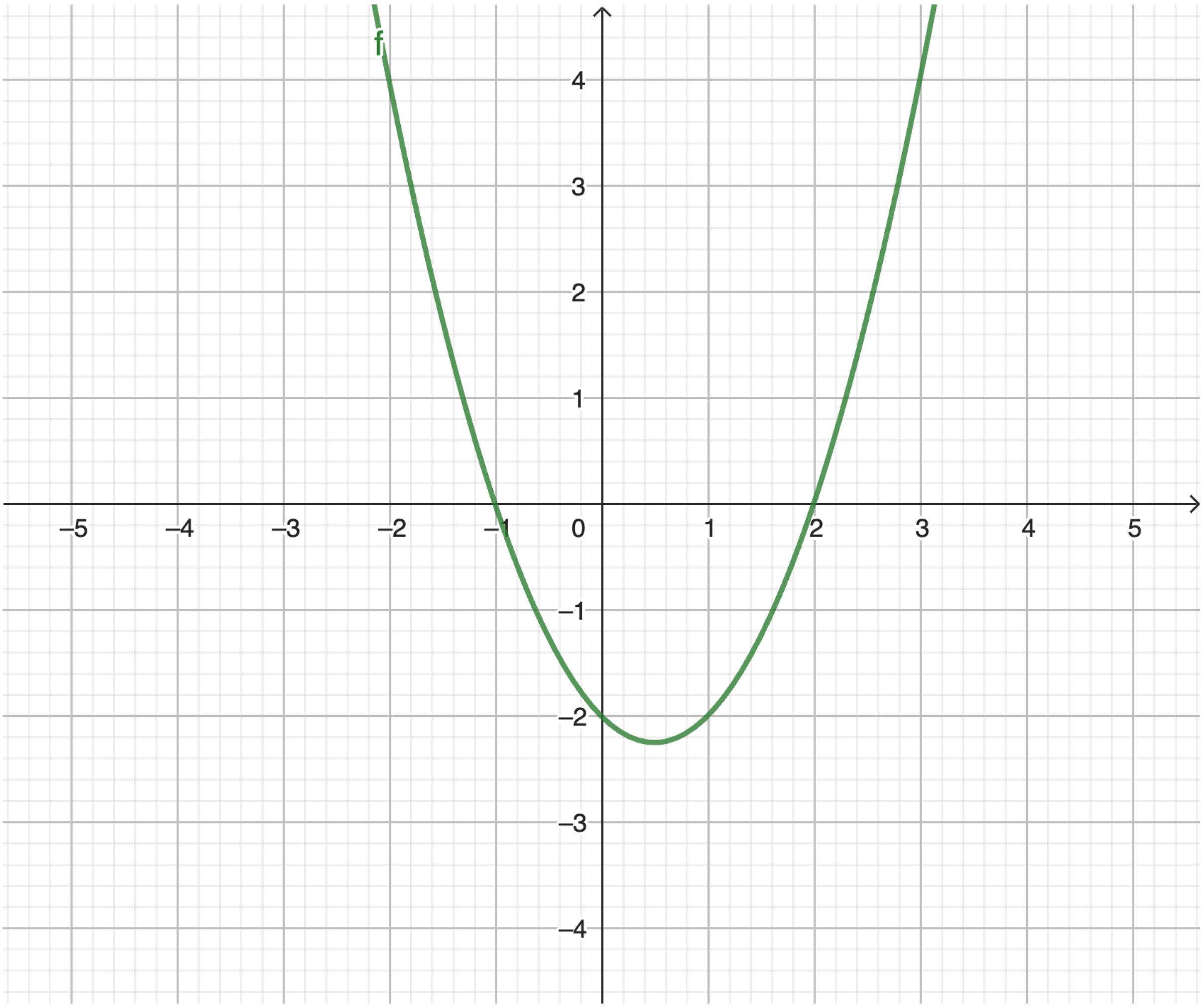
Dobbiamo ora valutare dove $f(x) > 0$.

$$\frac{x^3+1}{x^2-x-2} > 0$$

Quindi il numeratore e denominatore devono avere lo stesso segno.

Il denominatore $D(x)$ è rappresentato da una parabola rivolta verso l'alto che interseca in -1 e 2. Perciò è positivo per valori esterni a -1 e 2.

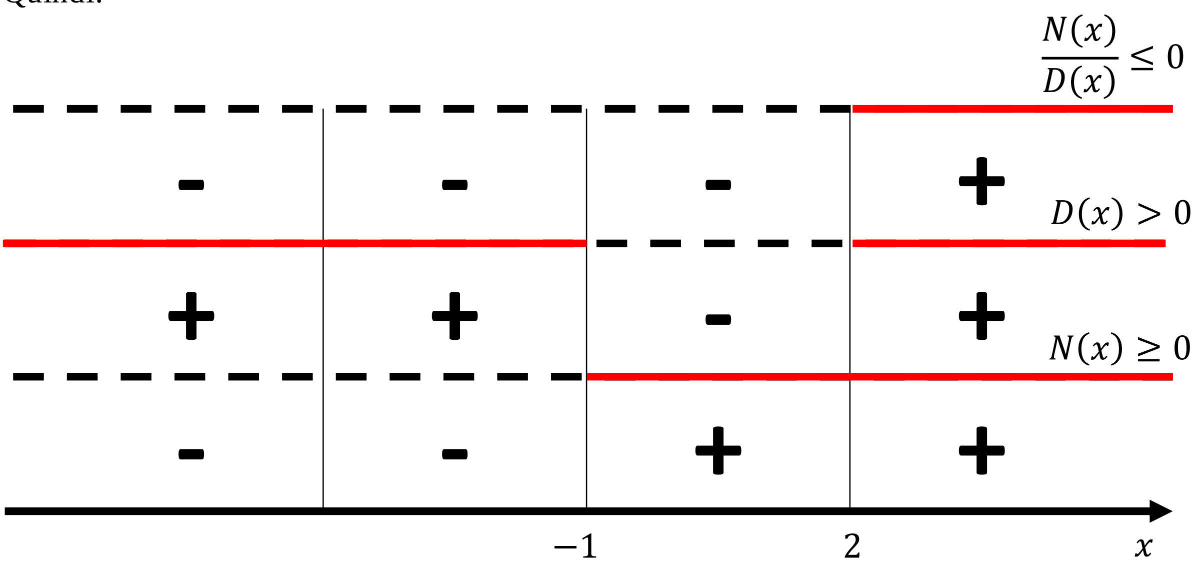
$$D(x) > 0 \rightarrow x < -1 \vee x > 2$$



Il numeratore $N(x)$ è invece una cubica centrata in (0,1). Tale curva è maggiore di zero per valori di x maggiori all'unica intersezione che possiede con gli assi, cioè -1-
Perciò:

$$N(x) > 0 \rightarrow x > -1$$

Quindi:



In definitiva la funzione è positiva per:

$$x > 2$$

Tutte le altre sono regioni di negatività.

2.4 Limiti ai confini del dominio

Per $x = -1$ la funzione è semplicemente discontinua, infatti, applicando il teorema di de l'Hospital si ottiene:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^3+1}{x^2-x-2} = \lim_{x\to -1^-} \frac{3x^2}{2x-1} = -1^-$$
$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^3+1}{x^2-x-2} = \lim_{x\to -1^+} \frac{3x^2}{2x-1} = -1^+$$

Dobbiamo capire cosa succede per $x \to 2$ sia da sinistra che da destra.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3+1}{x^2-x-2} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^3+1}{x^2-x-2} = +\infty$$

Perciò in due c'è un asintoto verticale.

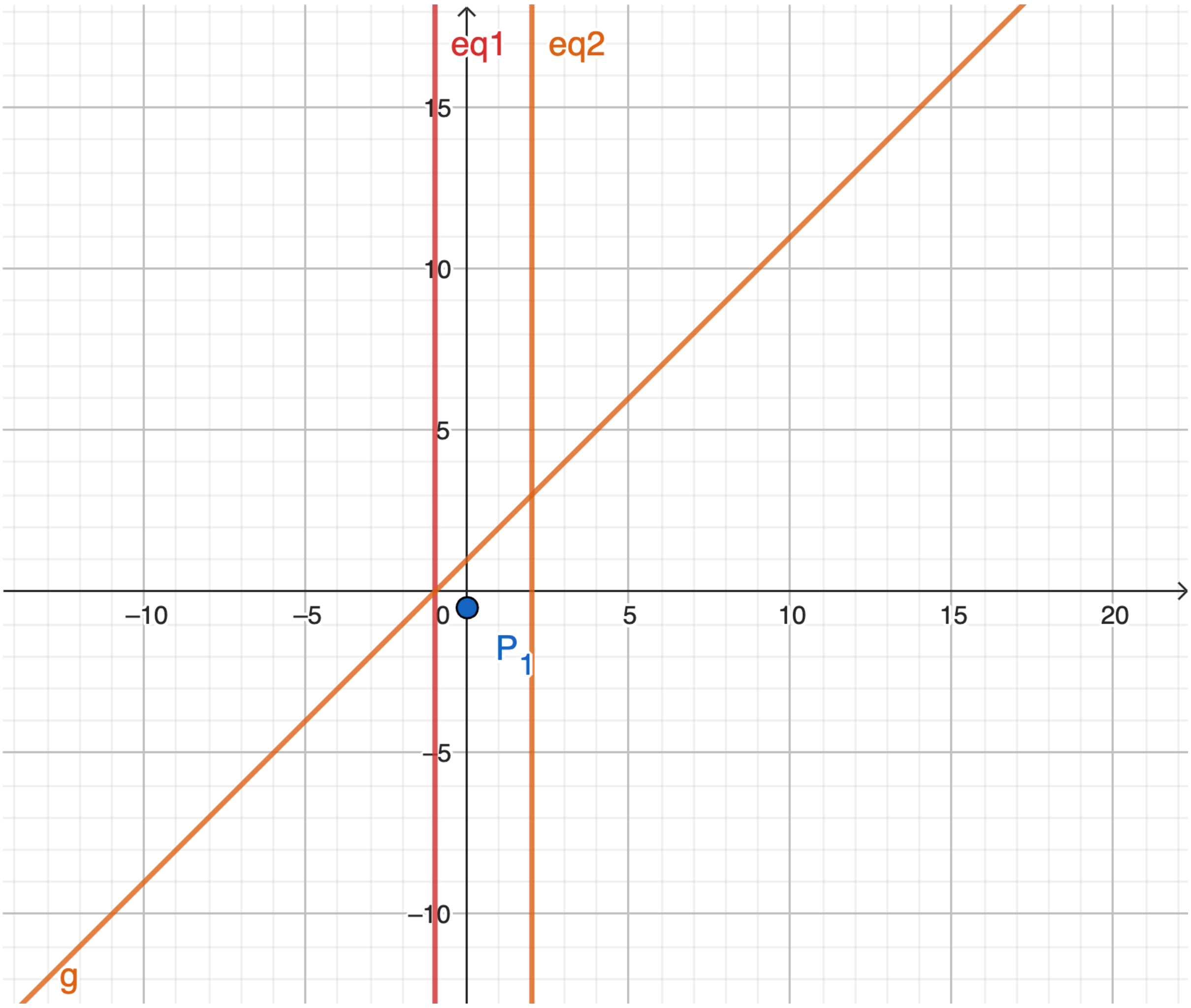
2.5 Ricerca di asintoto obliquo

Bisogna calcolare:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x^3+1}{x^2-x-2}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = 1$$

E poi:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+1}{x^2-x-2} - x =$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3+1-x^3+x^2+2x}{x^2-x-2} =$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2-x-2} = 1$$



A questo punto manca lo studio della derivata

2.6 Studio della derivata prima

Sapendo che la funzione è:

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x - 2}$$

La derivata della funzione è:

$$f'(x) = \frac{N'(x)D(x) - N(x)D'(x)}{[D(x)]^2} =$$

$$\frac{3x^2(x^2 - x - 2) - (x^3 + 1)(2x - 1)}{(x^2 - x - 2)^2} =$$

$$\frac{3x^4 - 3x^3 - 6x^2 - 2x^4 + x^3 - 2x + 1}{(x^2 - x - 2)^2} =$$

$$\frac{x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2(x-2)^2} =$$

$$\frac{(x+1)^2(x^2 - 4x + 1)}{(x+1)^2(x-2)^2}$$

In definitiva:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2}$$

Che è pari a zero quando:

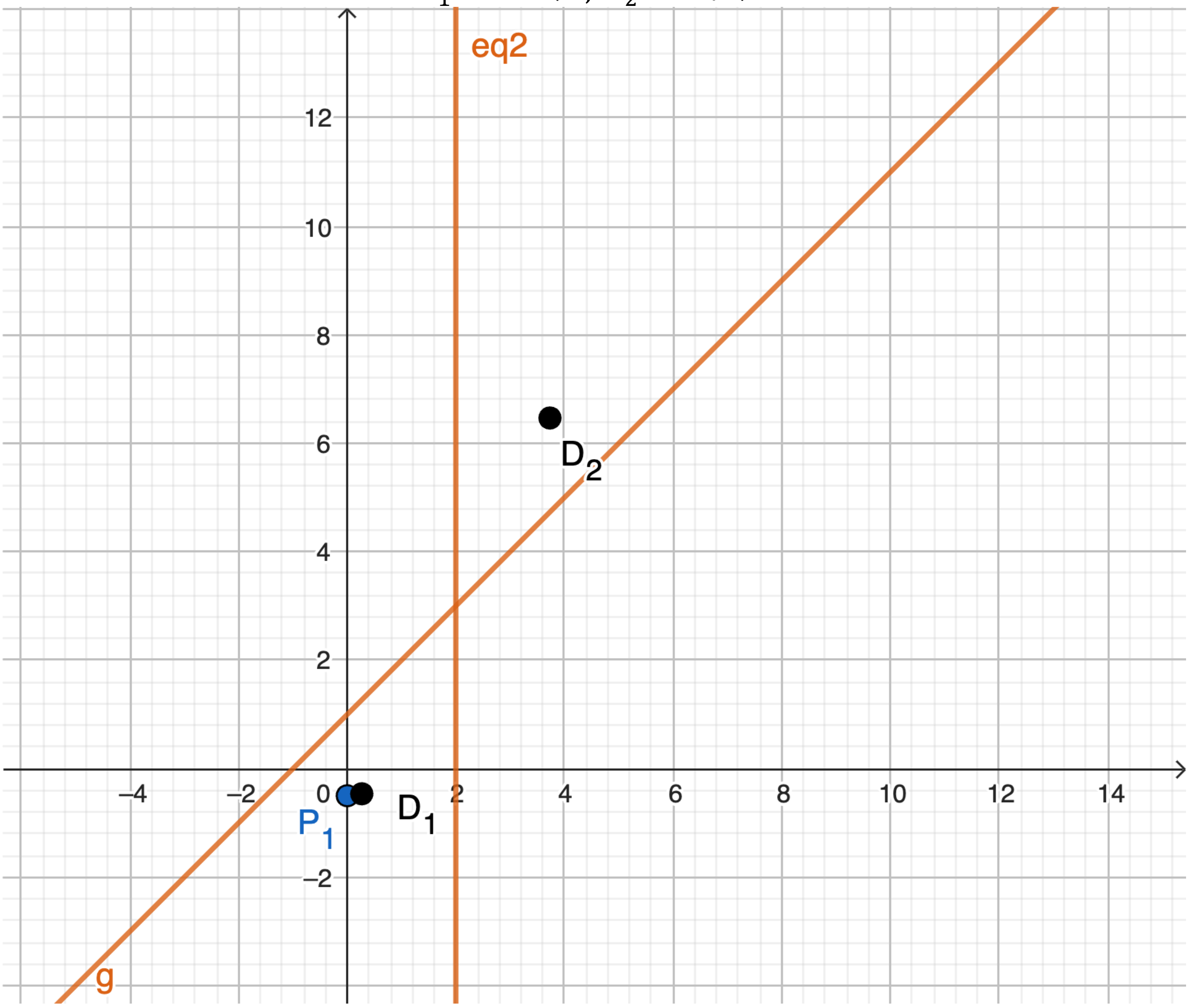
$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

Cioè:

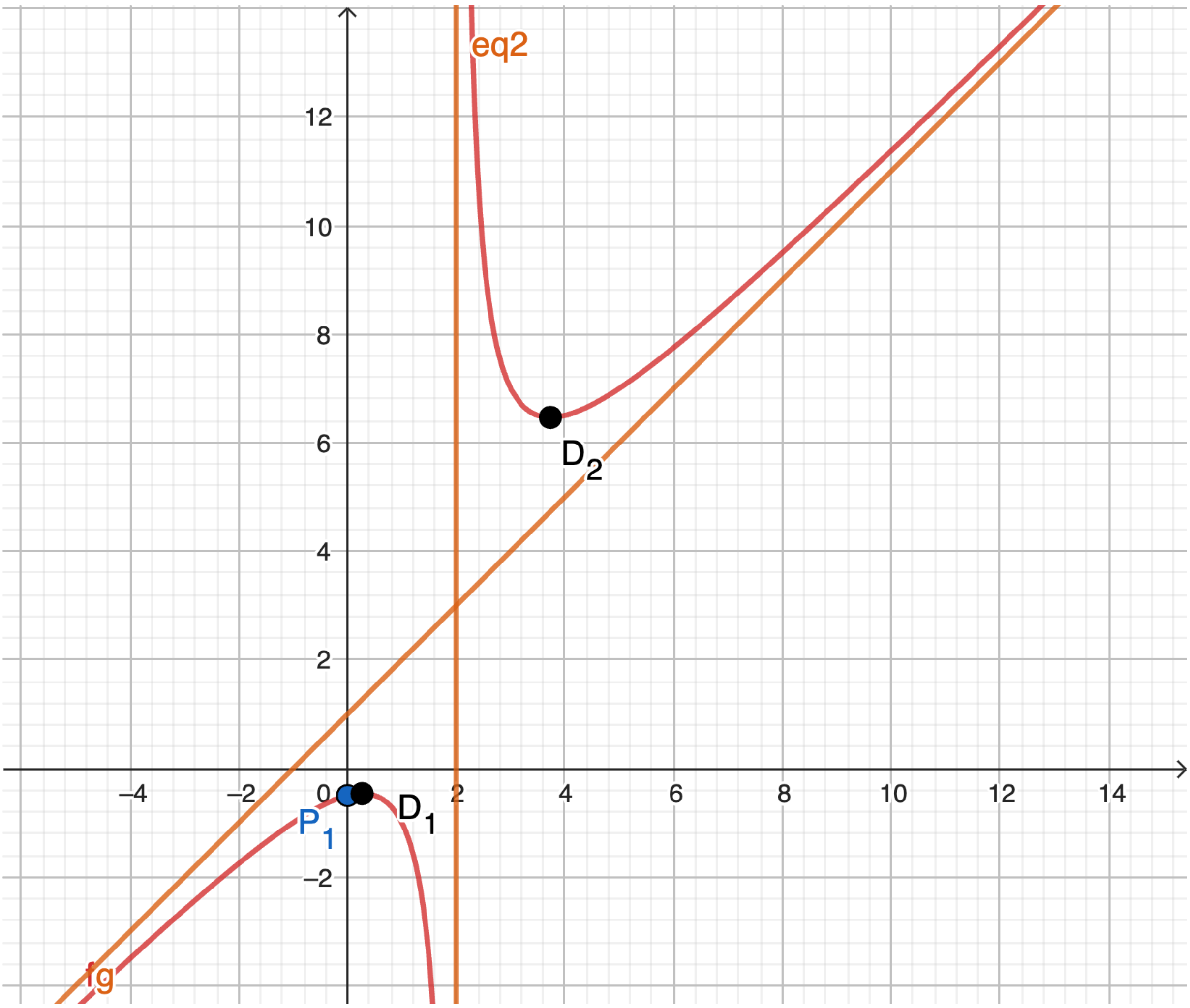
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Ovvero in:

$$x_1 = 2 - \sqrt{3};\ x_2 = 2 + \sqrt{3}$$



A questo punto la funzione è chiara ed è come di seguito


eq2
12
10
8
6
4
2
0
−2
−4
−2
2
4
6
8
10
12
14
D2
D1
P1
fg