Trova il trapezio conoscendo la sua area e la parabola

Determina le coordinate dei punti di un trapezio di area 32 che ha i suoi punti su una parabola di equazione $y = -x^2 + 8x - 7$

Soluzione

La parabola è convessa e interseca l'asse x per valori di ascisse ricavabili da questa formula:

$$x_{1,2} = \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(-1)(-7)}}{2(-1)}$$

Da cui:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 7$$

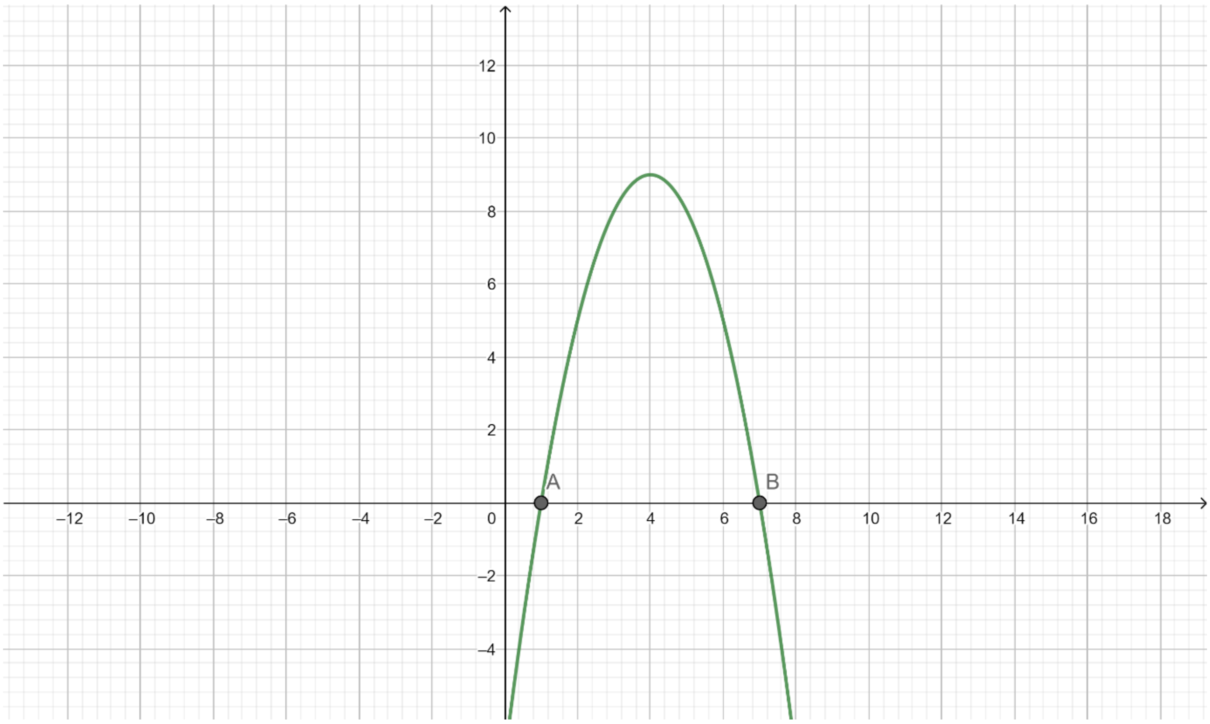

Figure 1 Rappresentazione della parabola e dei punti A e B

La base maggiore AB misura quindi 6.

La formula dell'area di un trapezio isoscele è:

$$A_{Trapezio} = \frac{(B+b)h}{2}$$

Di cui sono noti solo:

- $A_{Trapezio} = 32,$
- $B = 6.$

Per trovare una relazione che leghi *b* e *h* è necessario considerare il sistema:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 8x - 7 \\ y = h \end{cases}$$

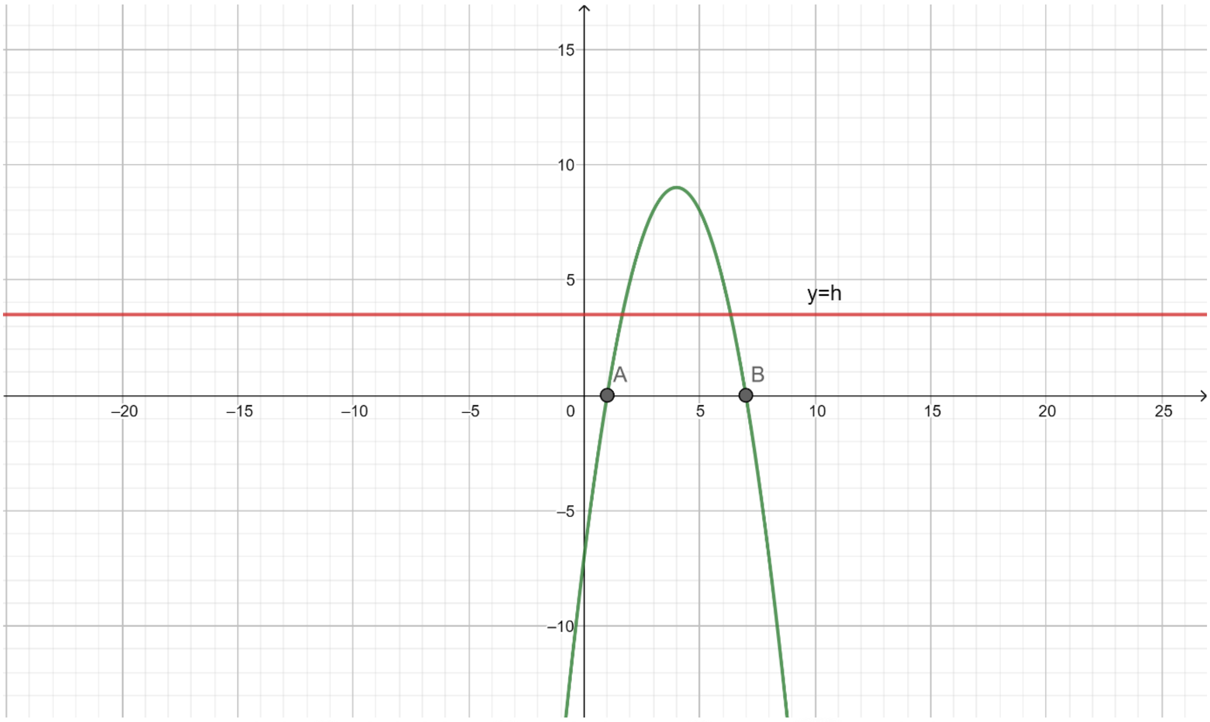

Figure 2 Rappresentazione del sistema precedente

E risolvere:

$$x^2 - 8x + (7 + h) = 0$$

Quindi:

$$x_{1,2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(7+h)}}{2(1)} = \frac{8 \pm \sqrt{36 - 4h}}{2}$$

Da cui:

$$x_1 = 4 - \sqrt{9 - h}; \quad x_2 = 4 + \sqrt{9 - h}$$

E allora b sarà esprimibile come:

$$b = x_{2,b} - x_{1,b} = 2\sqrt{9 - h}$$

Volendo esplicitare h:

$$b^2 = 4(9 - h) \to b^2 = 36 - 4h \to h = \frac{36 - b^2}{4}$$

Quindi:

$$A_{Trapezio} = \frac{(B + b)}{2} \cdot \frac{36 - b^2}{4}$$

E allora:

$$32 = \frac{(6+b)(36-b^2)}{8} \rightarrow$$

$$256 = (6+b)(36-b^2) \rightarrow$$

$$256 = 216 - 6b^2 + 36b - b^3 \rightarrow$$

$$b^3 + 6b^2 - 36b + 40 = 0$$

Da Ruffini:

$$(b-2)(b^2+8b-20) = 0$$

Da cui:

$$b_1 = 2$$

E:

$$b_{2,3} = \frac{-8 \pm \sqrt{64+80}}{2} \rightarrow$$

$$b_2 = 2;\ b_3 = -10$$

L'unica delle soluzioni ammissibili è 2, ciò significa che la base minore è lunga 2.

Poiché:

$$h = \frac{36-b^2}{4}$$

allora:

$$h = 8$$

Se ciò è vero significa che il sistema:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 8x - 7 \\ y = h \end{cases}$$

Deve essere riscritto come segue

$$\begin{cases} y = -x^2 + 8x - 7 \\ y = 8 \end{cases}$$

In quanto $h = 8$ e il segmento base minore del trapezio giace sulla retta $y = 8$.

Volendo trovare quindi i punti C e D richiesti dal problema si deve risolvere la seguente:

$$-x^2 + 8x - 15 = 0$$

E quindi:

$$x_{C,D}=\frac{-(8)\pm\sqrt{(8)^2-4(-1)(-15)}}{2(-1)}\rightarrow x_C=3;\ x_D=5$$

Da cui in definitiva:

$$A(1,0),B(7,0),C(3,8),D(5,8)$$

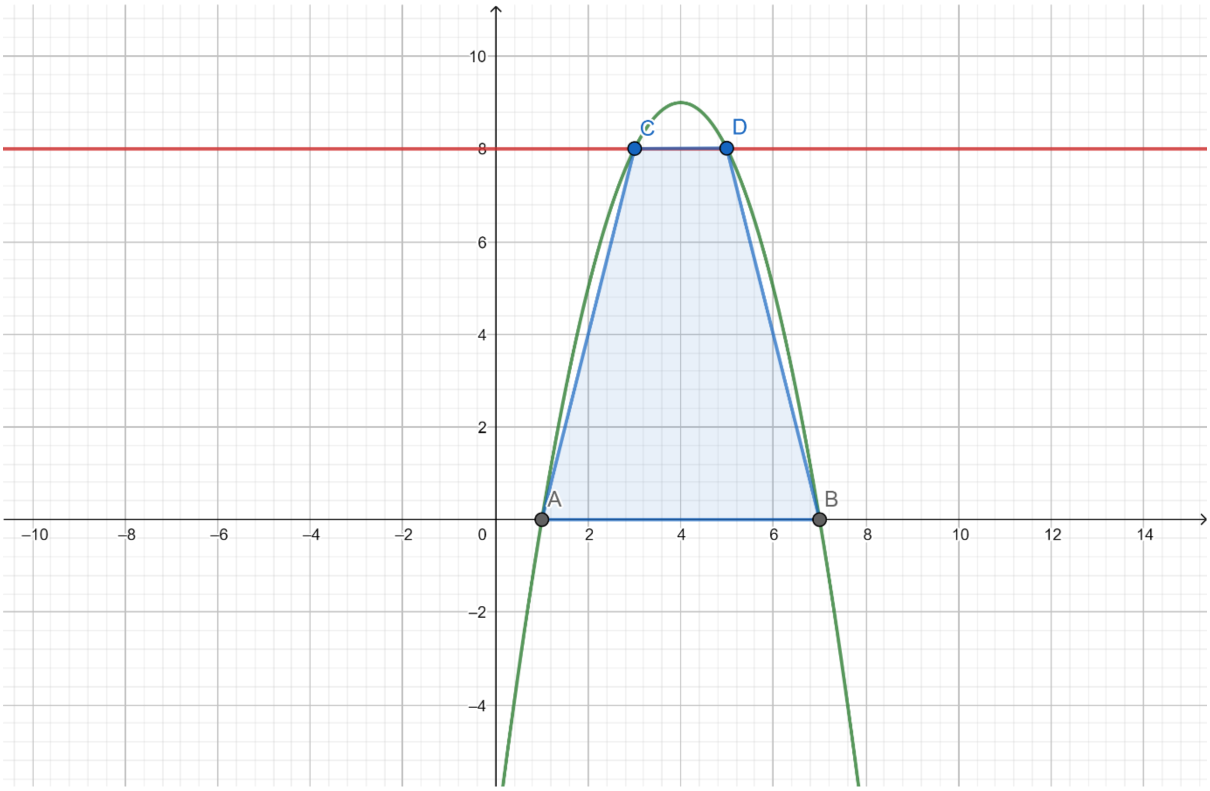

Figure 3 Rappresentazione grafica della soluzione