Spiegazione sul teorema di Fermat

Contents

In questo scritto è possibile trovare:

1. l'enunciato del teorema di Fermat;
2. richiami teorici sui requisiti per la corretta interpretazione del teorema e della sua dimostrazione;
3. la dimostrazione del teorema di Fermat.

1 Enunciato del teorema

Data una funzione reale ad una variabile reale, che risulta continua e derivabile in un certo intervallo aperto I del valore x_0, se in corrispondenza di x_0 vi è un punto di massimo (minimo) allora la derivata prima in x_0 vale zero. x_0 viene anche detto punto di stazionarietà per la funzione $f(x)$.

Più formalmente, se esiste una funzione $f :(a, b) \to \mathbb{R}$ che ha punto di massimo o minimo locale in $x_0 \in (a, b)$ e la funzione è differenziabile in x_0 allora $f'(x_0) = 0$.

L'affermazione dell'enunciato viene resa palese tramite la rappresentazione grafica in Figura 1, in cui i valori M (di massimo locale) ed m (di minimo locale) rappresentano valori scelti di x_0. Risulta chiaro che in corrispondenza di tali valori il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione è pari a zero, infatti la retta tangente risulta parallela all'asse x.

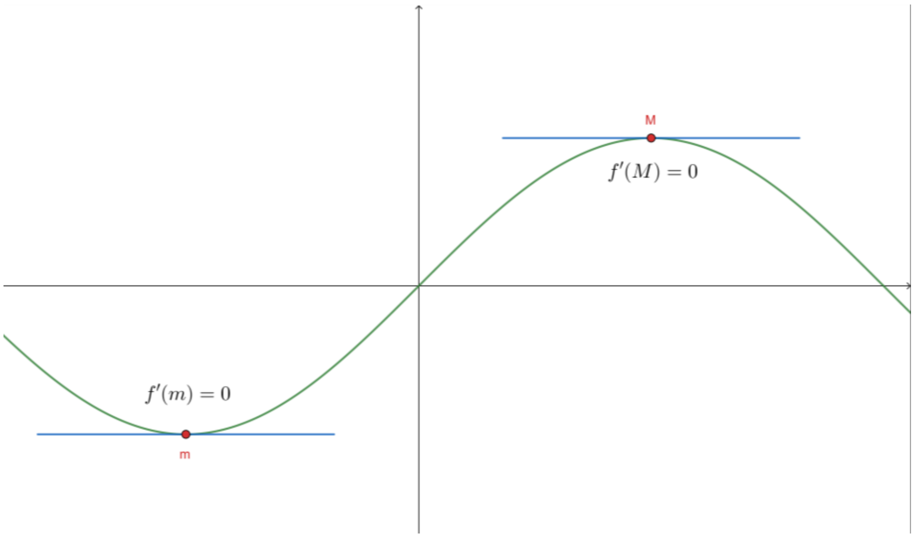

Figura 1 Illustrazione di punti di massimo e di minimo e della relativa direzione della retta tangente

Qualora il concetto del teorema di Fermat risulti poco chiaro è suggerito proseguire la lettura, in cui verranno chiarificati, tramite dei richiami teorici, i requisiti per la corretta interpretazione del teorema.

Alla fine dei richiami verrà mostrata la dimostrazione dell'enunciato, perciò se è tutto chiaro si consiglia di procedere direttamente alla dimostrazione del teorema di Fermat.

2 Prerequisiti

Prima di passare alla dimostrazione del teorema è consigliato dare un ripasso rapido ai seguenti concetti:

- Rapporto incrementale;
- Derivata prima in un punto;
- Massimi e minimi relativi;
- Massimi e minimi stazionari e non stazionari.

Vengono riportati di seguito dei richiami ai temi necessari per la corretta interpretazione del teorema di Fermat e della sua interpretazione. Qualora tutti questi concetti siano chiari, si passi tranquillamente alla dimostrazione del teorema.

3 Rapporto incrementale

Data una funzione continua in un determinato intorno I del valore x_0 si definisce rapporto incrementale in un punto x_0, appartenente all'intorno, il rapporto tra la variazione della funzione a seguito di un certo incremento h sull'asse delle x e l'incremento stesso.

In modo più formale, si supponga che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia una funzione continua in un certo intervallo I e si supponga che x_0 sia un punto appartenente ad I. Sia h un certo incremento, in x, rispetto al punto x_0, tale che sia identificabile un nuovo valore $x_0 + h$.

Il rapporto incrementale è dato da:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Una rappresentazione geometrica dei termini presenti nel rapporto incrementale è osservabile dalla Figura 1.

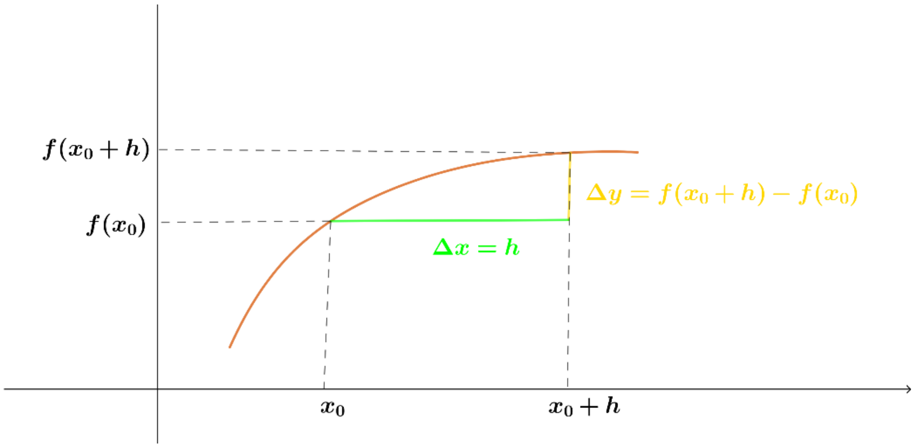

Figura 1 Rappresentazione delle differenze incrementali in y e in x

Come ulteriormente precisato in Figura 3, è possibile evincere come il rapporto incrementale sia geometricamente corrispondente alla pendenza della retta secante la funzione e passante per il punto $A\ (x_0, f(x_0))$ e il punto $B\ (x_0 + h, f(x_0 + h))$.

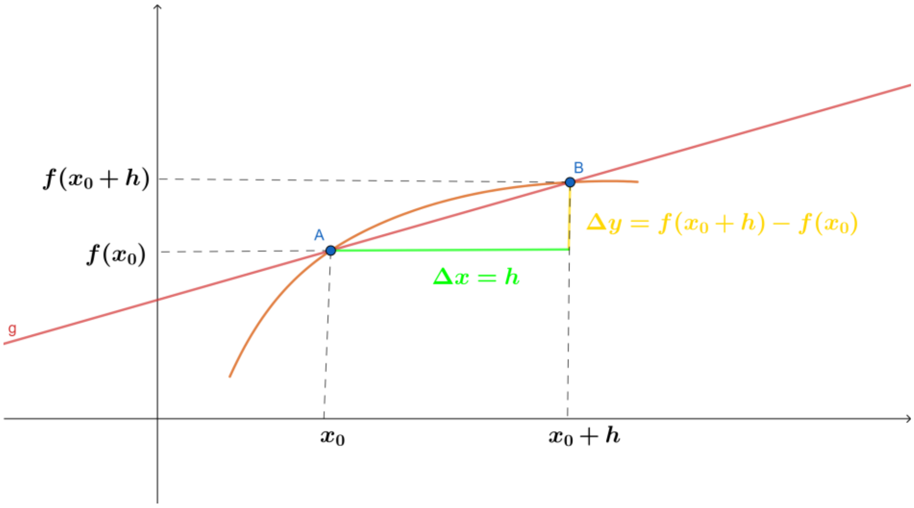

Figure 2 Rappresentazione della retta passante per i punti A e B

4 Derivata prima in un punto

La derivata prima di una funzione in un punto x_0 è definita come il limite, per h che tende a zero, del rapporto incrementale:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Il quale geometricamente esprime il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione nel punto x_0, come illustrato in Figura 2.

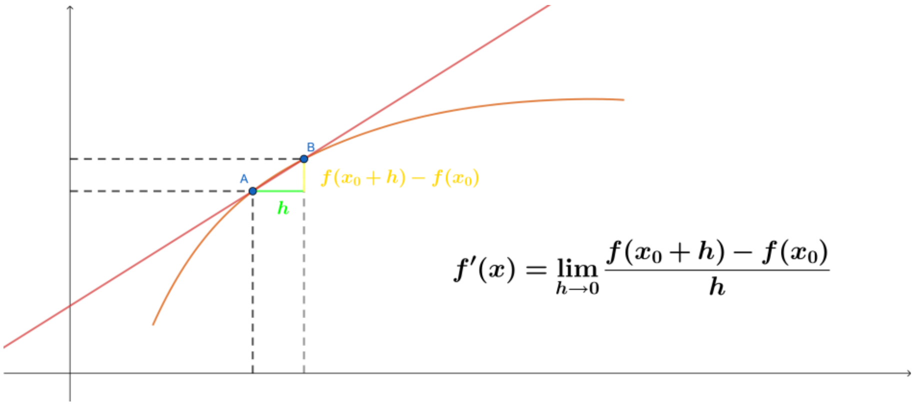

Figura 2 Rappresentazione del coefficiente angolare di una retta tangente in un punto. Il punto B si sovrappone dinamicamente ad A.

Il termine

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione $f(x)$ nel punto x_0 e si dice derivata prima della funzione $f(x)$.

5 Massimo/minimo relativo

6 Massimo relativo

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiamo x_0 punto di massimo relativo se esiste almeno un intorno di x_0 tale che, per ogni x appartenente all'intorno di x_0, il valore della funzione in x_0 è maggiore o uguale al valore che la funzione assume in ogni punto di tale intorno.

In Figura 3 viene rappresentato un intorno del valore x_0 e tale intorno è definito dalla quantità δ. La quantità δ può essere scelta piccola a piacere ma rimane comunque vero che x_0 è maggiore o uguale al valore che la funzione assume in ogni punto di tale intorno.

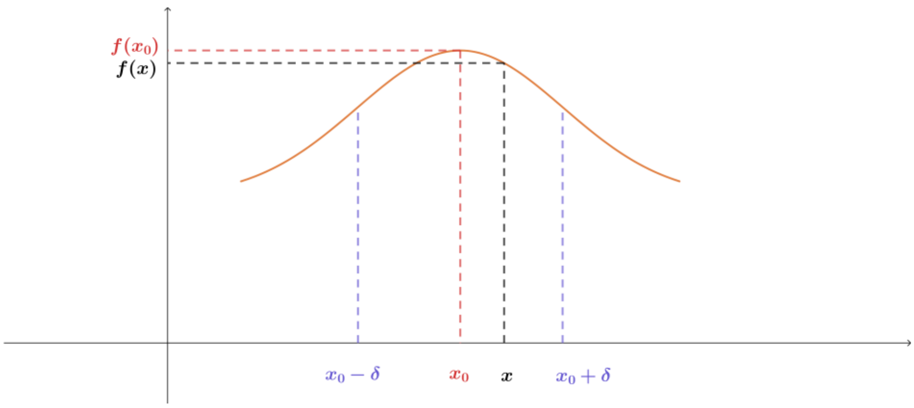

Figura 3 Rappresentazione di un valore di massimo locale per una funzione $f(x)$

Si supponga che tale intorno venga chiamato $I(x_0)$.

Deve essere vero che:

$$\forall x \in I(x_0) \to f(x_0) \geq f(x)$$

E si legge: per qualunque x appartenente all'intorno I di x_0 si ha che $f(x_0)$ è maggiore o uguale a $f(x)$.

7 Minimo relativo

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiamo x_0 punto di minimo relativo se esiste almeno un torno di x_0 tale che per ogni x appartenente all'intorno di x_0 il valore della funzione in x_0 è minore o uguale al valore che la funzione assume in ogni punto di tale intorno.

In Figura 4 viene rappresentato un intorno del valore x_0 e tale intorno è definito dalla quantità δ.

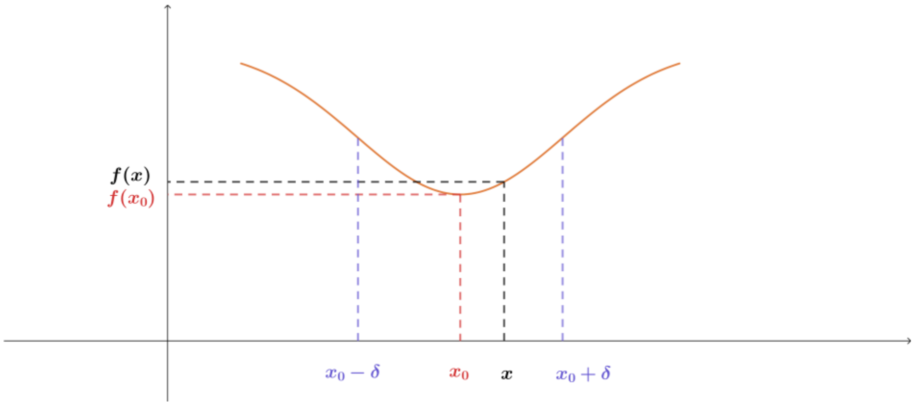

Figura 4 Rappresentazione di un valore di minimo locale per una funzione $f(x)$

Si supponga che tale intorno venga chiamato $I(x_0)$. Deve essere vero che:

$$\forall x \in I(x_0) \to f(x_0) \leq f(x)$$

8 Un punto di massimo/ minimo può essere stazionario o non stazionario

Un punto di massimo o di minimo può essere stazionario o non stazionario. In particolare, un punto è detto stazionario quando la derivata prima in quel punto vale zero. In questo caso la pendenza della retta tangente è nulla, e quindi la retta tangente è orizzontale.

Gli esempi riportati in Figura 3 e in Figura 4 mostrano dei punti stazionari rispettivamente di massimo e di minimo locale. Non necessariamente un punto di stazionarietà è però di massimo o di minimo locale, casistica in cui si parla di punto di flesso, come quella rappresentata in Figura 5.

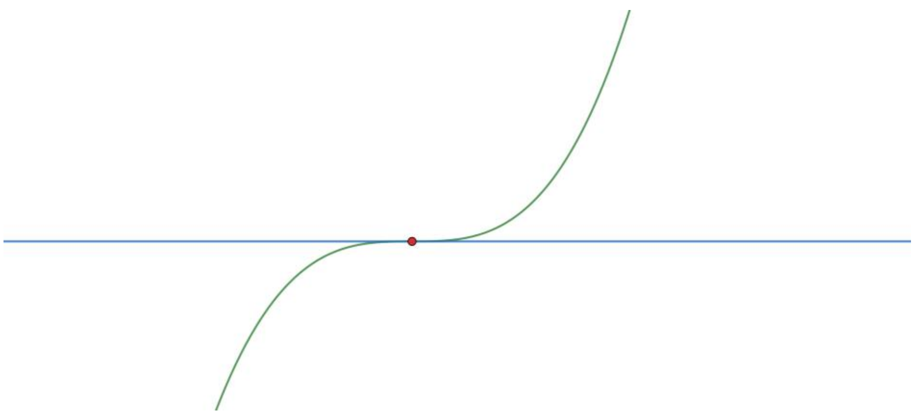

Figura 5 Rappresentazione di un punto di flesso. La derivata è zero ma il punto non è né di massimo né di minimo

Nel caso in cui non si è in presenza di punti di stazionarietà, questi possono comunque essere punti di massimo o di minimo locale. Infatti se è vero che la derivata nulla può essere indice di punto di massimo o di minimo locale non è vero che il contrario e cioè potrebbe essere possibile trovare dei punti di massimo o di minimo locale con valori di derivata diversi da zero.

Più precisamente può capitare per esempio che ci sia un punto in cui la derivata destra e sinistra siano tra loro diverse.

Le condizioni che potrebbero presentarsi sono le seguenti:

- Un punto angoloso,
- Una cuspide,
- Un estremo in cui la pendenza della retta è non nulla.

Questi casi possono dare luogo a dei minimi o dei massimi locali che sono

9 Massimo non stazionario

In Figura 6 vengono mostrati dei casi di massimo locale che non hanno derivata nulla, cioè non sono punti stazionari. Si può osservare come le rette tangenti in tali punti non mostrino coefficiente angolare uguale a zero.

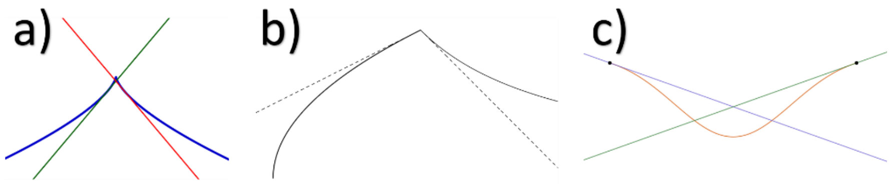

Figura 6 Esempi di massimi non stazionari a) Punto di cuspide b) Punto angoloso c) Estremi della funzione

In Figura 7 vengono mostrati dei casi di minimo locale che non hanno derivata nulla, cioè non sono punti stazionari. Si può osservare come le rette tangenti in tali punti non mostrino coefficiente angolare uguale a zero.

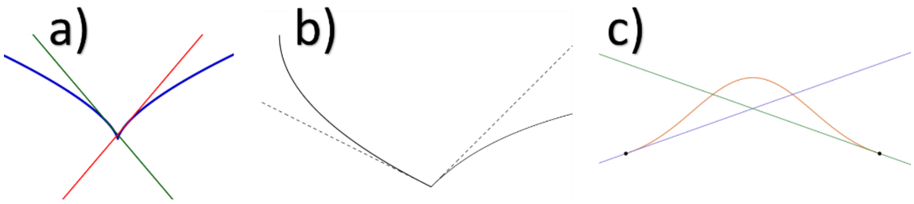

Figura 7 Esempi di minimi non stazionari a) Punto di cuspide b) Punto angoloso c) Estremi della funzione

10 Teorema di Fermat

Data una funzione reale ad una variabile reale che risulta continua e derivabile in un certo intervallo I, se x_0 è un punto di massimo (minimo) allora la derivata prima in x_0 vale zero. Ovvero x_0 è un punto stazionario.

Ipotesi

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in $I \subset D$ e $x_0 \in I$ sia un punto di massimo.

Tesi

$$f'(x) = 0$$

Cioè x_0 è stazionario.

Osservazione

L'ipotesi di derivabilità consente di non ricadere nel caso del punto angoloso o di cuspide, perché in tali punti, essendo le derivate sinistra e destra differenti, si parla di funzioni non derivabili in quei punti. Inoltre, l'ipotesi di derivabilità vieta la possibilità di stare agli estremi di definizione. In quanto in tali punti la funzione non ha derivata sinistra e destra ma o solo sinistra o solo destra.

11 Dimostrazione

Si consideri un certo intorno di x_0, $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. È possibile suddividere tale intorno in due zone:

1. Intorno sinistro di x_0, $(x_0 - \delta; x_0]$, indicato con $I^-(x_0)$;
2. Intorno destro di x_0, $[x_0; x_0 + \delta)$,indicato con $I^+(x_0)$.

In Figura 8 viene illustrata la situazione di riferimento.

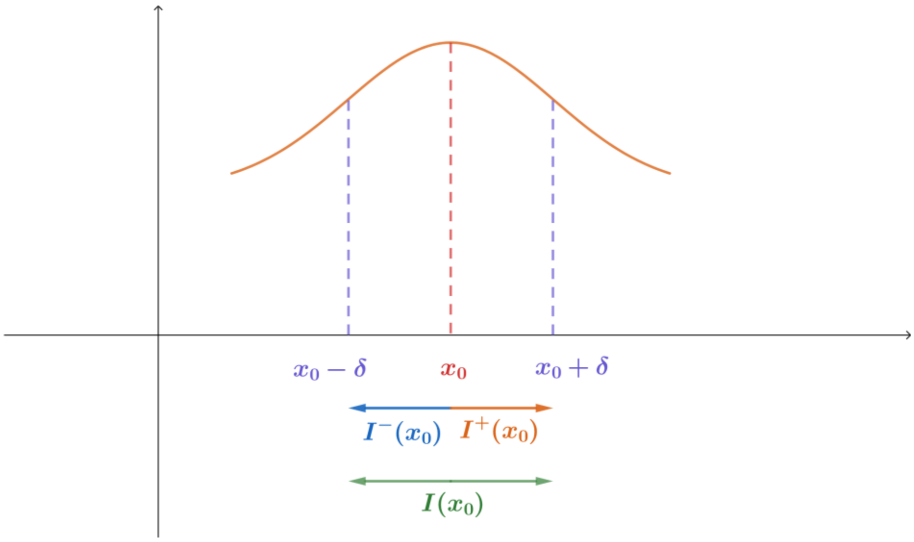

Figura 8 Illustrazione dell'intorno e dei due intorni, destro e sinistro, scelti in modo tale da essere simmetrici rispetto al punto di massimo locale

Quindi è possibile definire come segue l'intorno di x_0:

$$I(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

E come segue l'intorno sinistro di x_0:

$$I^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0)$$

E infine l'intorno destro di x_0:

$$I^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta)$$

12 Intorno sinistro di x_0

Si consideri ora l'intorno sinistro e il rapporto incrementale sinistro nel punto x_0, l'obiettivo è quello di ragionare sulla derivata sinistra nel punto x_0.

Si può scrivere il rapporto incrementale sinistro nel seguente modo:

$$RI^-(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

In questo caso è necessario considerare un valore di h negativo, perché la quantità $x_0 + h$ deve trovarsi a sinistra del valore x_0, come mostrato in Figura 9.

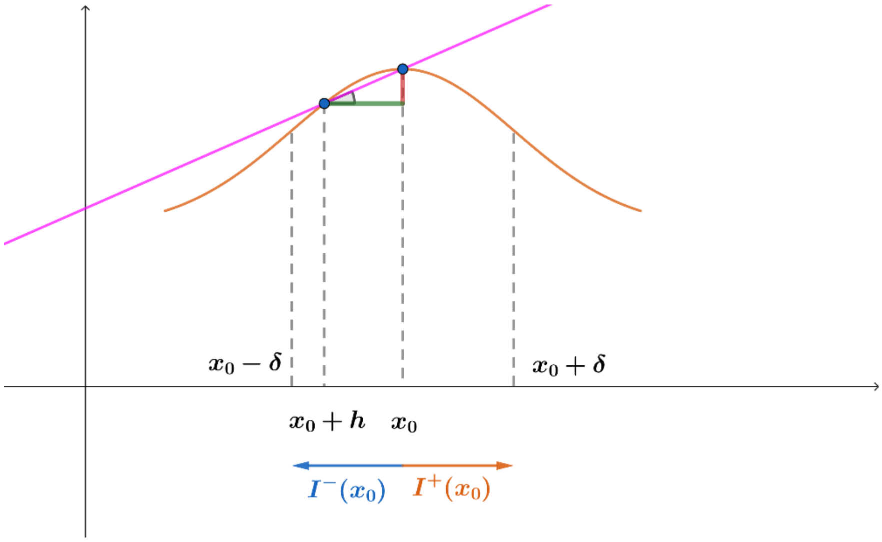

Figura 9 Illustrazione grafica del punto di massimo locale, del rapporto incrementale sinistro e della retta con tale coefficiente angolare

Considerando $h < 0$ per la quantità $RI^-(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ si deve avere che

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$$

Infatti

$$f(x_0) \geq f(x_0 + h)$$

E di conseguenza:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

Si nota subito che tale rapporto incrementale presenta:

- Un numeratore negativo;
- Un denominatore negativo.

Il numeratore è negativo poiché x_0 è punto di massimo, quindi il valore di $f(x_0)$ è maggiore o uguale a quello di ogni altra $f(x)$ all'interno dell'intorno $I^-(x_0)$ e quindi anche di $f(x_0 + h)$. Il denominatore è negativo poiché abbiamo assunto un incremento h negativo. Dunque, il rapporto incrementale nell'intorno sinistro è certamente maggiore o uguale a zero. Dopotutto è possibile notare come la retta secante sia crescente. Passando al limite del rapporto incrementale per h tendente a zero, dovremmo ammettere che è maggiore o uguale a zero.

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0} RI^-(x_0) \geq 0$$

Dunque, si sta ammettendo che la derivata sinistra è maggiore o uguale a zero.

13 Intorno destro di x_0

Si consideri ora l'intorno destro $I^+(x_0)$ e il rapporto incrementale destro nel punto x_0, l'obiettivo è quello di ragionare sulla derivata destra nel punto x_0.

Si può scrivere il rapporto incrementale destro nel seguente modo:

$$RI^+(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

In questo caso è invece necessario ammettere che il valore di h è positivo, come viene delucidato dalla Figura 10.

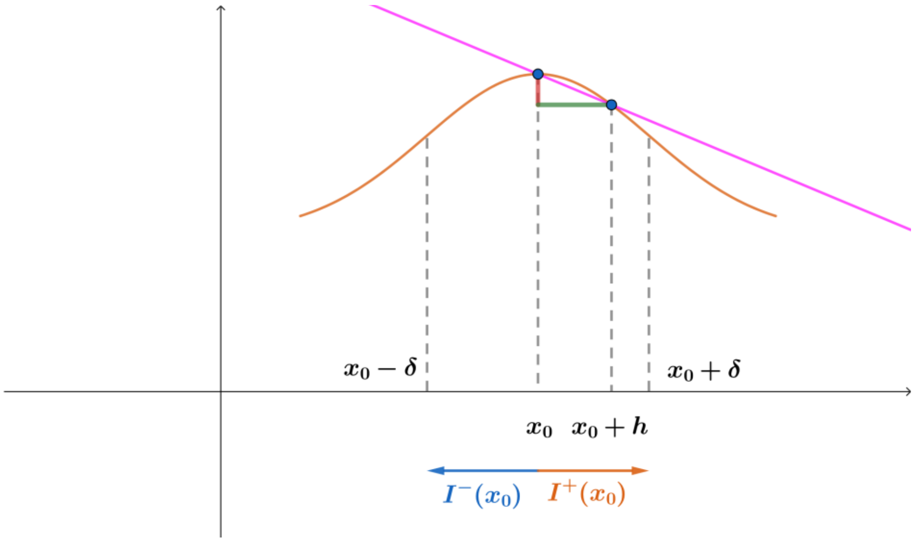

Figura 10 Illustrazione grafica del punto di massimo locale, del rapporto incrementale destro e della retta con tale coefficiente angolare

Considerando $h > 0$ per la quantità $RI^+(x_0) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ si deve avere che

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$$

Infatti:

$$f(x_0) \geq f(x_0 + h)$$

E di conseguenza:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

Notiamo subito che tale rapporto incrementale presenta:

- Un numeratore negativo
- Un denominatore positivo

Il numeratore è ancora negativo, poiché x_0 è punto di massimo. Quindi il valore di $f(x_0)$ è maggiore o uguale a quello di ogni altra $f(x)$ all'interno dell'intorno $I^+(x_0)$ e quindi anche di $f(x_0 + h)$. Il denominatore è positivo poiché è stato assunto un incremento h positivo, dunque il rapporto incrementale nell'intorno sinistro è certamente minore o uguale a zero. Dopotutto è possibile notare come la retta sia secante è decrescente. Passando al limite del rapporto incrementale per h tendente a zero, è necessario ammettere che è minore o uguale a zero.

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0} RI^+(x_0) \leq 0$$

Dunque, si sta ammettendo che la derivata destra è minore o uguale a zero.

Volendo ricapitolare:

- La derivata sinistra di x_0 è maggiore o uguale a zero.
- La derivata destra di x_0 è minore o uguale a zero.

Un'illustrazione della situazione di questa prima conclusione viene fornita in Figura 11.

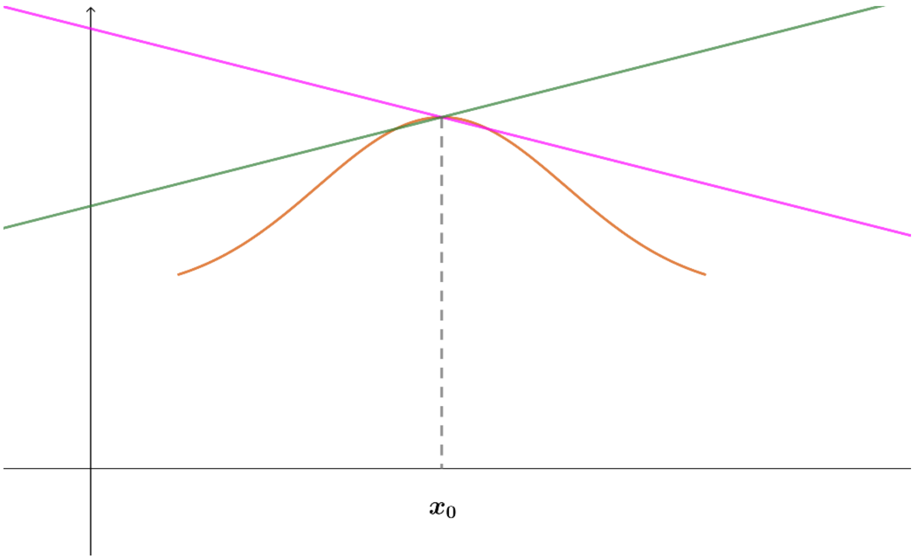

Figura 11illustrazione della retta secante sinistra e retta secante destra al punto x_0 precedentemente considerate

Siccome la funzione è derivabile in x_0 per ipotesi, allora la derivata sinistra deve per forza coincidere con la derivata destra. Questo è possibile solamente quando la derivata è uguale a zero, che è la tesi.

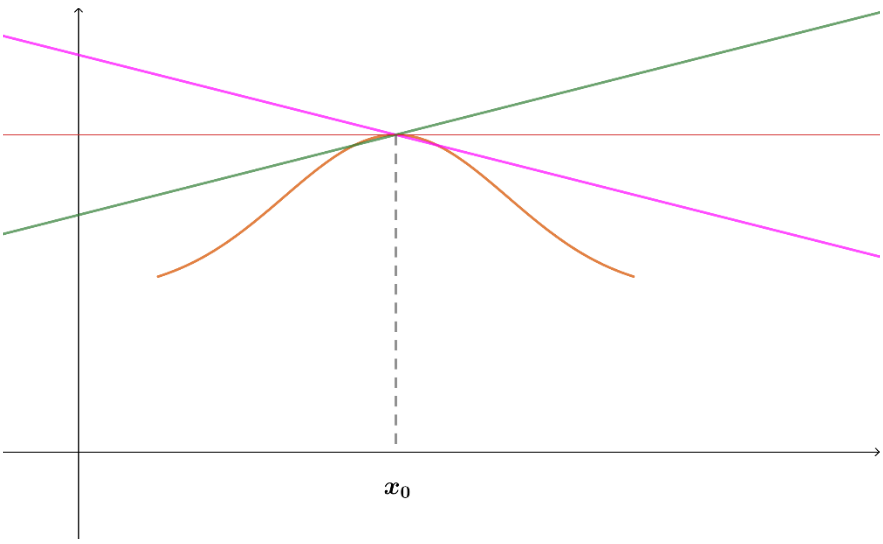

Figura 12

Tenendo in considerazione che $f'_-(x_0) \geq 0$ e che $f'_+(x_0) \leq 0$ deve dunque essere per forza che:

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0$$

È stato dunque dimostrato che se una funzione è continua e derivabile in un certo intervallo, i punti di massimo (o di minimo) presenti internamente sono stazionari.